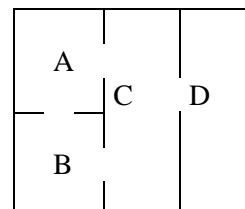


TÉCNICAS DE CONTAR

Principios básicos

- 1) ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 , cuyas cifras sean todas distintas?
- 2) Las placas de matrícula de los vehículos de un cierto país constan de 4 letras seguidas de 3 números. ¿Cuántas placas distintas pueden formarse?
- 3) ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 que no sean capicúas?
- 4) ¿Cuántos enteros m del 1 al 1000 no son divisibles por 3?
- 5) Demuestra que si se eligen 5 puntos cualesquiera en un cuadrado de lado 2, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\sqrt{2}$.
- 6) ¿Cuántos puntos han de elegirse en un cuadrado de lado 2 para asegurar que al menos 2 de ellos estarán a una distancia no superior a $\sqrt{2}/n$?
- 7) Demuestra que si se eligen 10 puntos cualesquiera en un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $1/3$.
- 8) ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener la clase de Matemática Discreta para estar seguros que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota? (Se supone que sólo hay puntuaciones enteras).
- 9) Calcula el número de divisores de 112.000. ¿Cuántos son impares?
- 10) ¿Cuántos divisores positivos tiene el número $29338848000 = 2^8 3^5 5^3 7^3 11$? ¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?
- 11) ¿Cuántos números de tres cifras distintas tienen todas ellas impares?, ¿y pares?
- 12) Se extraen, con reemplazamiento y ordenadamente, cinco cartas de una baraja. ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey? ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey o un as?
- 13) Demuestra que en un conjunto de 12 enteros existen dos cuya diferencia es divisible por 11. ¿Es cierto si cambiamos diferencia por suma?
- 14) Se eligen $n+1$ enteros positivos en el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$. Demuestra que existen dos cuya diferencia es menor o igual que 2.
- 15) Se han de pintar las habitaciones de la casa que se muestra en la figura, de forma que las habitaciones que están conectadas por una puerta tengan colores distintos. ¿De cuántas maneras puede pintarse si se dispone de n colores?

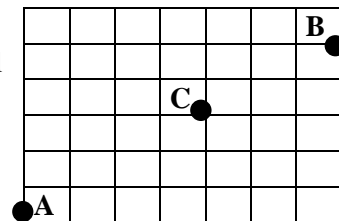


Variaciones, permutaciones y combinaciones

- 1) Lanzando un dado 5 veces ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse, si se tiene en cuenta el orden de lanzamiento?
- 2) Lanzando 5 dados indistinguibles entre sí ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse?

- 3) Dadas 5 vocales y 4 consonantes, ¿cuántas palabras de 2 vocales y 2 consonantes distintas se pueden formar teniendo en cuenta que en cada palabra no figuran dos consonantes seguidas?
- 4) ¿Cuántas sucesiones de ceros y unos, de longitud n , contienen exactamente tres veces el 0?
- 5) Se tienen siete libros azules, cinco negros y tres blancos, distintos entre sí. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden alinear en un estante si han de colocarse juntos los del mismo color?
- 6) Un circuito eléctrico posee 10 interruptores. Teniendo en cuenta que cada interruptor tiene dos posiciones $\{1, 0\}$, ¿cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los interruptores? ¿Cuántos estados tienen tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0?
- 7) ¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

- 8) La cuadrícula de la figura representa calles de una ciudad. Suponiendo que las únicas direcciones permitidas de viaje son hacia el este y hacia el norte, ¿cuántos caminos distintos conducen de A hasta B? ¿cuántos de ellos pasan por C?



- 9) Extrayendo 5 cartas de una baraja de 40 ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse:
 a) con reemplazamiento b) sin reemplazamiento (el orden de aparición es irrelevante).
- 10) Un banco tiene que elegir 5 cargos: director, subdirector, interventor, cajero y gestor, entre 8 personas, de las cuales 3 son hombres $\{A, E, O\}$ y 5 mujeres $\{X, Y, Z, V, W\}$ ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:
 a) Los hombres A y E no pueden estar juntos en la misma elección.
 b) Se eligen los tres hombres.
 c) Se eligen tres mujeres y dos hombres.
 d) Se eligen tres mujeres al menos?
- 11) El consejo de administración de una empresa está compuesto por 5 personas $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto y nadie puede abstenerse pero sí puede votar en blanco. ¿Cuántos resultados distintos se pueden extraer de la urna una vez efectuada la votación? Considerando que se aprueba el proyecto con al menos 3 votos favorables ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?
- 12) Se tienen 5 sobres y 5 cartas y se distribuyen al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas se pueden distribuir para que no haya ninguna coincidencia? ¿Y para que haya una coincidencia? ¿Y para que haya dos coincidencias? ... ¿Y para que haya cinco?
- 13) En un tablero de ajedrez de 8×8 casillas, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar 8 torres iguales de forma que ninguna esté en la diagonal ni se puedan comer entre ellas?
- 14) ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger cinco cartas de una baraja de 52 cartas de modo que se tenga al menos una carta de cada palo?
- 15) ¿Cuántas palabras de 13 letras pueden formarse con las letras de la palabra CLASIFICACIÓN?

- 16) Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?
- 17) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 canicas idénticas entre 6 niños? ¿Y si las canicas son todas ellas de distintos colores?
- 18) Determina el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ donde:
- a) $x_i \geq 0$ $1 \leq i \leq 4$ b) $x_i > 0$ $1 \leq i \leq 4$ c) $x_1, x_2 \geq 5$; $x_3, x_4 \geq 7$
d) $x_i \geq 8$ $1 \leq i \leq 4$ e) $x_i \geq -2$ $1 \leq i \leq 4$ f) $x_1, x_2, x_3 > 0$; $0 < x_4 \leq 25$.
- 19) ¿Cuántos números hay en el conjunto $\{1, 2, \dots, 1000\}$ tales que la suma de sus dígitos sea 5?
- 20) a) ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es 9?
b) ¿Cuántos números enteros de los hallados en a) tienen todos sus dígitos distintos de cero?
- 21) Se considera el código, sobre el alfabeto $B = \{0, 1\}$, formado por las palabras de 16 dígitos en las que el número de unos es múltiplo de 4. ¿Cuántas palabras distintas puede haber?
- 22) Dados n puntos sobre una circunferencia, se trazan todos los segmentos que determinan entre sí. ¿Cuántos hay? Suponiendo que no hay tres segmentos con un punto en común, ¿cuál es el número de puntos de intersección en el interior de la circunferencia?
- 23) El número de manos de 5 cartas de una baraja de 52 cartas que contienen al menos tres picas, no es $C_{13,3} \times C_{49,2}$. ¿Cuál es la respuesta correcta?
- 24) ¿Cuál es el número de cuaternas (a, b, c, d) de números enteros que satisfacen $0 < a < b < c < d < 20$?
- 25) ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 parejas entre 30 personas?
- 26) Calcular el número de sucesiones que se pueden formar con 3 A, 5 B y 8 C. ¿Y si no puede haber dos B consecutivas? ¿Y si no hay dos letras iguales consecutivas?
- 27) ¿Cuántas sucesiones de 10 símbolos pueden formarse con 4 A, 4 B, 4 C y 4 D si cada símbolo debe aparecer, al menos, dos veces?
- 28) a) Una caravana publicitaria consta de 6 coches y 6 furgonetas, siendo todos los vehículos de diferente color. ¿De cuántas formas diferentes puede organizarse la fila de la caravana, con la condición de que no circulen dos furgonetas juntas?
b) Si se suprimen dos furgonetas, ¿cuántas caravanas diferentes se pueden formar con la condición anterior?
- 29) En un centro de enseñanza se reciben solicitudes de ingreso, que se atienden según las calificaciones de las siguientes asignaturas: Matemáticas, Física, Química e Inglés. Cada asignatura tiene una puntuación entera entre 5 y 10.
- a) ¿Cuántos expedientes académicos diferentes se pueden recibir?
b) ¿Cuántos de ellos tienen de nota media 7?
- 30) a) En las aulas 1, 2, 3 y 4 de la Facultad de Informática, se van a examinar 192 alumnos de la asignatura Matemática Discreta. Suponiendo que no hay limitación en la capacidad de las aulas, ¿de cuántas formas se puede efectuar la distribución de los alumnos en las aulas?
b) Como la capacidad de las aulas sí es limitada, se introducen, entre todas las aulas, un total de 54 sillas auxiliares para la realización del examen. Si en cada aula no caben más de 20 sillas, ¿de cuántas formas se puede efectuar el reparto de sillas en las aulas?